

44

Γραφικές Διοφαντικές Εξισώσεις ← SOS!! (ΘΕΝΑ)

Έστω $f(x_1, \dots, x_n)$ ένα πολυώνιο με ακεραίους συντελεστές.

Πα παραδείγματα : $f(x) = 3x - 2$, $f(x, y) = 3x + 5y$, $f(x, y) = 5x^2 + 3y^4$
 $f(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$

Μια γραφική διαφανική εξίσωση είναι μία εξίσωση της μορφής $f(x_1, \dots, x_m) = 0^{(X)}$ όπου $f(x_1, \dots, x_m)$ είναι πολ/ο με ακέραιους συντελεστές.

Μια ακεραία πολυμ. της (*) είναι μια n -αδα $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$
ώστε $f(z_1, \dots, z_n) = 0$

Παράδειγμα: $f(x, y, z) = x^n + y^n - z^n$, που έχει 24 Δ.Ε.:
 $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x^n + y^n = z^n$

Για $n=1$ ή $n=2$ η $f(x,y,z)$ έχει άσπηρες ακέραιες τιμές.

Για $n > 2$ η $f(x, y, z) = 0$ δεν έχει ακεραίες λύσεις (Εκθετικά ή μεγάλο θεώρημα του Fermat)

Odyssey Wiles-Taylor (1994)

Проблема: Анонимизация ~~содержимого~~ : (а) 83 тенга
: (б) 84 тенга

Καθαρισμός 2 ειδών $\begin{cases} \rightarrow 6 \text{ Άνδρα} \\ \rightarrow 15 \text{ Άνδρα} \end{cases}$

X: 124ος γραμματικός των 6 περσών
 Y: — 11 — 15 11 —

y: 11- 15-11-

⊗ $6x + 15y = 83$ / $\begin{matrix} \text{Τυράφι} & \text{αρέακις} & \text{ε'ιδωλέρη} & \text{Ουζίκης} \\ 6x + 15y = 84 & \text{Αίβης} \end{matrix}$

Μία γραμμική Δ.Ε. είναι μία Δ.Ε. της μορφής:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = b \text{ όπου } \alpha_i, b \in \mathbb{Z} \quad \forall i=1, \dots, n.$$

Παράδειγμα: $f(x,y) = 2x^3 + xy - 7$ και έστω η Δ.Ε.: $2x^3 + xy = 7$ (*)

Ζητάμε: (Α) Πρώτες λύσεις, (Β) Ακέραιες λύσεις.

• Έστω (x,y) : πρώτη λύση της (*) $\Rightarrow x,y \in \mathbb{Q}$: $2x^3 + xy = 7$.

Τότε προφανώς $x \neq 0$ και $x(2x^2 + y) = 7 \Rightarrow x | 7 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \pm 1$ ή $x = \pm 7$ 7: πρώτος

Τότε επειδή $xy = 7 - 2x^3 \Rightarrow y = \frac{-2x^3 + 7}{x} \Rightarrow$ προκύπτουν τα ζεύγη:
 $(1,5), (-1,-9), (7,-97), (-7,-99)$: ακέραιες λύσεις.
 Ακέραιες λύσεις.

Για πρώτες λύσεις $x \in \mathbb{Q}$
 $x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{-2x^3 + 7}{x} \in \mathbb{Q}$.

Άρα $\left\{ (x, \frac{-2x^3 + 7}{x}) \mid x \neq 0, x \in \mathbb{Q} \right\}$ (θεωρεί ακέραιες λύσεις)
 $(1,5)$
 Πρώτες λύσεις.



Θεώρημα: Η γραμμική Διαφομετρική Εξίσωση: $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = b$ (*)
 όπου $\alpha_1, \dots, \alpha_n, b \in \mathbb{Z}$ έχει ακέραιες λύσεις $\Leftrightarrow$
 $(\Rightarrow) d := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid b$.

Απόδειξη: Έστω $d = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ θα έχουμε ότι $d \mid \alpha_1, \dots, d \mid \alpha_n$
 και $\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n : d = \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n$.

Είναι: $\exists (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n : \alpha_1 = d z_1, \dots, \alpha_n = d z_n$.

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι η (*) έχει τουλάχιστον μία ακέραια λύση
 $(x_1, \dots, x_n)$. Τότε: $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = b \Rightarrow$
 $\Rightarrow d z_1 x_1 + \dots + d z_n x_n = b \Rightarrow d(z_1 x_1 + \dots + z_n x_n) \Rightarrow \boxed{d \mid b}$

$(\Leftarrow)$ Έστω $d \mid b \Rightarrow b = d d'$, για $d' \in \mathbb{Z}$.

Επειδή $\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n = d \Rightarrow \alpha_1 c_1 \cdot d' + \dots + \alpha_n c_n \cdot d' = d d' = b \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ ακέραιοι αριθμοί: $z_1 = c_1 d', \dots, z_n = c_n d' \in \mathbb{Z}$:

$\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n = b \Rightarrow (z_1, \dots, z_n)$: ακέραια λύση της (*)

Παράδειγμα: $6x+8y+10z=1$. Επειδή $(6,8,10)=2$. Το $2 \nmid 1$
άρα η Δ.Ε. δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Όπως η $6x+8y+10z=4$ έχει ακέραιες λύσεις δίνει
το $2=(6,8,10) \nmid 4$ (και θεωρήματα).

Θεώρημα: Έστω η γραμμική Διαφορική Εξίσωση $ax+by=c(*)$
όπου $a,b,c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Η $(*)$ έχει ακέραιες λύσεις $\Leftrightarrow$
 $\Rightarrow$ ~~Η Δ.Ε.~~ $d=(a,b) \mid c$, και τότε όλες οι ακέραιες λύσεις
της εξίσωσης $(*)$ είναι:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases} \quad \left| \quad t \in \mathbb{Z} \right. \quad \begin{array}{l} \text{όπου } (x_0, y_0) \text{ οποιαδήποτε ακέραια} \\ \text{λύση της } (*). \end{array}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $d := (a,b) \mid c$ κ' άρα $\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$
και πράγματι $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

Υποθέτουμε ότι $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ είναι ακέραια λύση της $(*) \Rightarrow$
 $\Rightarrow ax_0 + by_0 = c$

$$ax + by = a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right) = ax_0 + by_0 + \frac{ab}{d}t - \frac{ab}{d}t = c$$

Άρα προκύπτει το ~~(x,y) = (x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t)~~ $(x,y) = \left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t\right)$
είναι λύση της $(*)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Υποθέτουμε ότι το (x,y) είναι μια ακέραια λύση της $(*)$
 $\left. \begin{array}{l} \text{δηλ } ax+by=c \\ \text{Όπως } ax_0+by_0=c \end{array} \right\} \Rightarrow ax+by = ax_0+by_0 \Rightarrow a(x-x_0) = b(y_0-y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{d}(x-x_0) = \frac{b}{d}(y_0-y) \Rightarrow \frac{a}{d} \mid \frac{b}{d}(y_0-y) \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{d} \mid (y_0-y) \Rightarrow y_0-y = t \cdot \frac{a}{d}, \text{ για κάποιο } t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_0 - \frac{a}{d}t}, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Εννοώ } \alpha x + b y = c \Rightarrow \alpha x + b(y_0 - \frac{a}{d}t) = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha x + b y_0 - \frac{b a}{d} t = c$$

$$\text{Εννοώ } \alpha x_0 + b y_0 = c \Rightarrow b y_0 = c - \alpha x_0$$

$$\Rightarrow \alpha x + \cancel{\alpha x_0} - \alpha x_0 = \frac{b a}{d} t = \cancel{c} \Rightarrow \alpha(x - x_0) = \frac{b a}{d} t \stackrel{\alpha \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{b}{d} t \Rightarrow \boxed{x = x_0 + \frac{b}{d} t}, \text{ για } t \in \mathbb{Z}$$



ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΗΣ Δ.Ε. : $\alpha x + b y = c$ $\alpha, b \in \mathbb{Z}$ (*)
 $\alpha, b \neq 0$.

① Εύρεση του $d = (\alpha, b)$

② Εξετάζουμε αν $d | c$

α) Αν $d \nmid c$ τότε η (*) δεν έχει ακέραιες λύσεις.

β) Αν $d | c$ τότε η (*) έχει ακέραιες λύσεις

③ $d | c \Rightarrow c = d c'$ όπου $c' \in \mathbb{Z}$.

$d = (\alpha, b) \Rightarrow \exists x', y' : d = \alpha x' + b y' \leftarrow \text{Ευκλείδεια Διαίρεση!}$

④ $\alpha x' c' + b y' c' = d c' \Rightarrow \alpha(x' c') + b(y' c') = c$ κ' τότε :

$\left. \begin{matrix} x_0 = x' c' \\ y_0 = y' c' \end{matrix} \right\}$ το ζεύγος (x_0, y_0) είναι ακέραια λύση της (*)

⑤ Όλες οι ακέραιες λύσεις της (*) θα είναι :

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t \end{cases} / t \in \mathbb{Z}$$



Παράδειγμα : (το πρώτο που κάναμε) :

(α) $6x + 15y = 83$

(β) $6x + 15y = 84$

Λύση : (α) $d = (\alpha, b) = (6, 15) = 3$. $\left. \begin{matrix} 3 \nmid 83 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{η } 6x + 15y = 83 \text{ δεν έχει ακέραιες λύσεις.}$

(β) $d = (6, 15) = 3 / 84 \Rightarrow \textcircled{84} = \textcircled{3} \textcircled{28} \leftarrow \sim$

$$\begin{aligned} 15 &= 2 \cdot 6 + 3 \leftarrow d \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

$$\text{και εδωκε } \frac{3}{d} = \frac{6 \cdot (-2) + 15 \cdot 1}{b \cdot y'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 28 = 6 \cdot (-2 \cdot 28) + 15 \cdot 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot (-56) + 15 \cdot 28 = 84$$

Αρα έχω βρει μια κέραια λύση της (*):

$$(x_0, y_0) = (-56, 28)$$

Όλες οι κέραιες λύσεις θα είναι:
$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t = -56 + 5t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t = 28 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Αναζητάμε μη-αρνητικές λύσεις (x, y) δηλ $x, y \geq 0$.

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow -56 + 5t \geq 0 \Rightarrow t \geq 56/5 = 11.2 \\ y \geq 0 &\Rightarrow 28 - 2t \geq 0 \Rightarrow 2t \leq 28 \Rightarrow t \leq 14 \end{aligned} \quad \left. \begin{matrix} t \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 12, 13, 14}$$

Αρα οι δυνατοί συνδυασμοί θα είναι: ①
$$\begin{cases} x = -56 + 5 \cdot 12 = 4 \\ y = 28 - 2 \cdot 12 = 4 \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} x = -56 + 5 \cdot 13 = 9 \\ y = 28 - 2 \cdot 13 = 2 \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} x = -56 + 5 \cdot 14 = 14 \\ y = 28 - 2 \cdot 14 = 0 \end{cases}$$



Παράδειγμα: $221x + 340y = 51$ (*)

$$a = 221, \quad b = 340, \quad c = 51$$

$$d = (221, 340)$$

Ευκλείδεια Διαίρεση: $340 = 221 \cdot 1 + 119$

$$221 = 119 \cdot 1 + 102$$

$$119 = 102 \cdot 1 + 17 \leftarrow d$$

$$102 = 17 \cdot 6 + 0$$

Αρα $d = (a, b) = 17$

car $d = 17 | c = 51$ donc $c = 51 = 17 \cdot 3$.

$$17 = 119 - 102 = 119 - (221 - 119) = -221 + 2 \cdot 119 = 221 + 2(340 - 221) = 2 \cdot 340 - 3 \cdot 221$$

Après $\frac{221 \cdot (-3)}{a \cdot x'} + \frac{340 \cdot 2}{b \cdot y'} = \frac{17}{d}$

Après $\begin{cases} x_0 = c'x' \\ y_0 = c'y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \cdot (-3) = -9 \\ y_0 = 3 \cdot 2 = 6 \end{cases}$

Après $(x_0, y_0) = (-9, 6)$ vérifie la relation (*).

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t = -9 + \frac{340}{17}t = -9 + 20t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t = 6 - \frac{221}{17}t = 6 - 13t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z} \leftarrow \text{Aréaires Nombres}$$

Rechercher les Aréaires Nombres dans $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9 + 20t > 0 \\ 6 - 13t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6t > 9 \\ 6 > 13t \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{20} < t < \frac{6}{13} \quad \text{Aucun}$$

—

Théorème : $6x + 4y + 8z = 2 \Leftrightarrow 3x + 2y + 4z = 1$ (*)

(***) $d = (3, 2, 4) = 1 \mid 1 \Rightarrow \eta$ (*) a des Aréaires Nombres.

Déroule $3x + 2y = w \in \mathbb{Z}$. Alors on a $w + 4z = 1$ (**)

(**) $\Rightarrow w = 1 - 4z$ car c'est évident $z = -1 \Rightarrow w = 5$

Après $\begin{cases} w = 5 \\ z = -1 \end{cases}$ évalue la relation (**)

C'est alors la relation (*) qu'on a : $d = (3, 2) = 1$

$$\begin{cases} w = w_0 + \frac{b}{d}t = 5 + 4t \\ z = z_0 - \frac{a}{d}t = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

(***) $\Rightarrow 3x + 2y = w = 5 + 4t \Rightarrow 3x + 2y = 5 + 4t$

Enfin $d = (3, 2) = 1 \mid (5 + 4t) \Rightarrow \eta$ (***) a des Aréaires Nombres.

Τότε: μία αρέσκει λύση της (***) η $\begin{cases} x_0 = 5 + 4t \\ y_0 = -5 - 4t \end{cases}$

Όλες οι αρέσκει λύσεις θα είναι οι:

$$\begin{cases} x = 5 + 4t + \left(\frac{b}{d}\right)^2 s = 5 + 4t + 2s \\ y = -5 - 4t - 3s = -5 - 4t - 3s \end{cases}$$

Άρα όλες οι λύσεις της (***) είναι: $\begin{cases} x = 5 + 4t + 2s \\ y = -5 - 4t - 3s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{Z}.$

Άρα οι αρέσκει λύσεις της (*) θα είναι:

$$\begin{cases} x = 5 + 4t + 2s \\ y = -5 - 4t - 3s \\ z = -1 - t \end{cases} \quad // \quad t, s \in \mathbb{Z}.$$

Φυλλάδιο (#4)

Ασκ 5: Έστω η Δ.Ε. : $ax + by = c$ (*) κ' έστω $(a, b) = 1$.

Τότε το σύνολο των θετικών λύσεων της (*) είναι πεπερασμένο.

Εφαρμογή: Έχει η $31x + 43y = 5$ θετικές λύσεις:

~~Επειδή $d = (31, 43) = 1 \mid 5$ άρα η (*) έχει~~

~~αρέσκει λύσεις~~

Επειδή $d = (a, b) = 1 \mid c$ η (*) θα έχει αρέσκει λύσεις.

~~και~~ της μορφής: $\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} t \\ y = y_0 - \frac{a}{d} t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.$